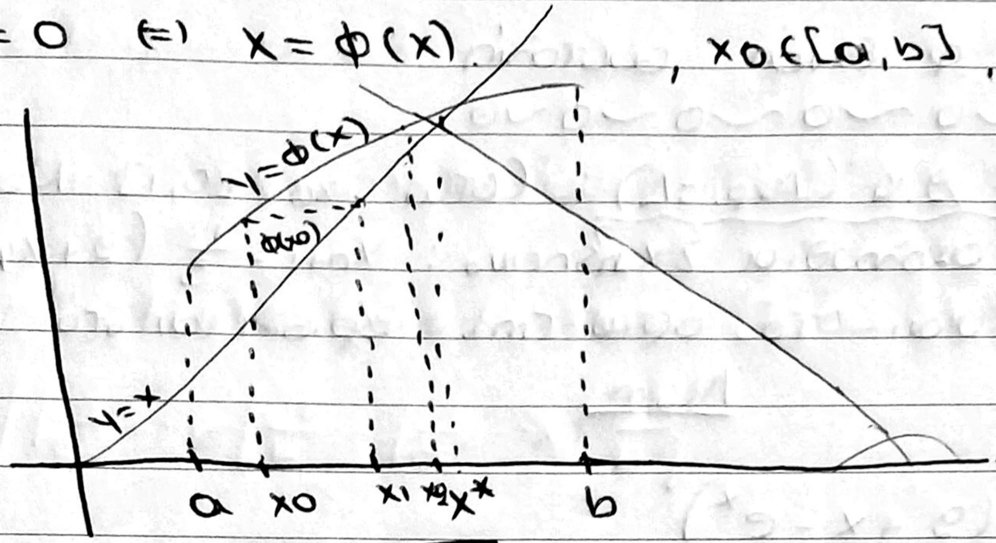
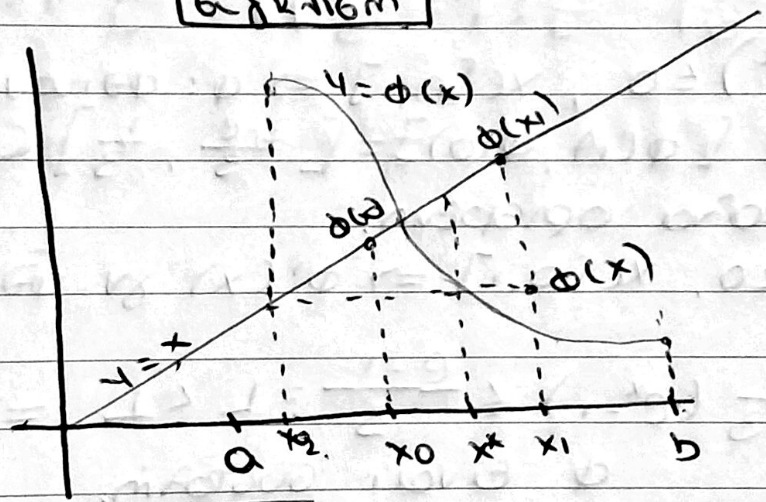
30/10/2017

Γεωμετρική Ερμηνεία Θ Συστολής

$f(x) = 0 \iff x = \phi(x)$, $x_0 \in [a,b]$, $x_1 = \phi(x_0)$



σύγκλιση



απόκλιση

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Άσκηση 2.8. (Ακρ.-Δογαλ.): Έστω $x_0 \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ με: $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$.

Λύση

$$f(x) = x - \frac{1}{2} e^{x/2} = 0$$

$\phi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$, $\phi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$, $x \in [0,1] \Rightarrow$
η ϕ γν. αύξουσα στο $[0,1]$

Αν $x \in [0,1]$, τότε $\phi(x) \in [\phi(0), \phi(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right] \subset [0,1]$
$\Rightarrow$ καλά ορισμένη.

$$|\phi'(x)| = \left|\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\right| < \frac{1}{4}\cdot e^{1/4} = \frac{\sqrt{e}}{4} = L < 1 \Rightarrow$$

Άρα η ϕ είναι συστολή

~o~o~o~o~o~o~o

<u>Άσκηση 2.9 (Ακρ.-Δ)</u>: Έστω $x_0 \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$: $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$ συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$.

<u>Λύση</u>

$$\phi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x)$$

$\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \leq 0$, $x \in [0,1] \Rightarrow \phi$: φθίνουσα

$x \in [0,1]$: $\phi(x) \in [\phi(1), \phi(0)] = \left[\frac{3-e}{3}, \frac{1}{3}\right] \subset [0,1] \Rightarrow$ καλά ορισμένη.

$\phi''(x) = -\frac{1}{3}e^x < 0$, $x \in [0,1] \Rightarrow \phi'(x)$ γν. φθ. στο $[0,1]$

$$|\phi'(x)| = \frac{1}{3}(e^x - 1) \leq \frac{e-1}{3} = L < 1 \Rightarrow \text{η}$$

ϕ είναι συστολή.

~o~o~o~o~o~o~o

<u>Άσκηση 2.10. (Ακρ-Δ.)</u>

Για $x_0 \in [0,1]$, δίνεται η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

$x_{n+1} = \frac{1}{6}(3 + 4x_n^2 - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Να αποδείξετε ότι συγκλίνει, και το όριο της x^* βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης ν.α.ο.: $|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a}\cdot|x_1 - x_0|$, $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$a = \frac{8-e}{6}$$

<u>Λύση</u>

$\phi(x) = \frac{1}{6}(3 + 4x^2 - e^x)$, $\phi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x) \leq \phi(x) =$

$= \frac{1}{6}(3 + 4x^2 - e^x)$

$\frac{1}{6}(3 + 4 \cdot 0^2 - e^0) \leq \phi(x) = \frac{1}{6}(3 + 4x^2 - e^x) \leq \frac{1}{6}(3 + 4 \cdot 1^2 - e^1)$

$= 1.$

$x \in [0,1] : \Rightarrow \phi(x) \in \left[\frac{3-e}{6}, 1\right] \subset [0,1] \Rightarrow \phi'$ υπαρχει ορισμενη.

$\phi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \phi'$ γν. αυξουσα στο $[0,1]$

$\phi'(0) < \phi'(x) < \phi'(1) \Leftrightarrow \phi'(x) \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\right]$

$\max_{x \in [0,1]} |\phi'(x)| = \max\left\{\left|-\frac{1}{6}\right|, \left|\frac{8-e}{6}\right|\right\} = \frac{8-e}{6} = L = a < 1.$

Ισχυει το θεωρημα συστολης.

<u>Ασκηση</u> : Εστω $x_0 \in [0,1]$. Ναο: η ακολουθια $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$: $x_{n+1} = \frac{1}{4}\left|x_n^3 - \frac{1}{8}\right|$, $n \in \mathbb{N}_0$ συγκλινει στη ριζα της εξισωσης : $f(x) = x - \frac{1}{4}\left|x^2 - \frac{1}{8}\right| = 0$. που βρισκεται στο $[0,1]$.

<u>Λυση</u>

$\phi(x) = \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| \notin C'[0,1]$. (δεν οριζεται η $f'(x)$ για $x = \frac{1}{2}$.)

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} - x^3\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \downarrow \\ \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{8}\right), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \uparrow \end{cases}$$

$\phi(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} - 0^3\right) = \frac{1}{32}$

$\phi(1) = \frac{1}{4}\left(1^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{32}$

$\phi(x) \in \left[0, \max\left\{\frac{1}{32}, \frac{7}{32}\right\}\right] = \left[0, \frac{7}{32}\right] \subset [0,1] \Rightarrow$

καλά ορισμένη.

Επειδή $\phi \notin C^1[0,1]$, θα μελετήσουμε την συνθήκη Lipschitz.

Έστω $x, y \in [0,1]$ τότε: $|\phi(x) - \phi(y)| =$

$$\left| \frac{1}{4}\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| - \frac{1}{4}\left|y^3 - \frac{1}{8}\right| \right| \leq$$

$$\left| \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\left(y^3 - \frac{1}{8}\right) \right| = \frac{1}{4}\left|x^3 - y^3\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left|x^2 + xy + y^2\right|\left|x - y\right| \leq \frac{3}{4}|x-y| \Rightarrow \phi \text{ συστολή με}$$

$L = 3/4$